Fragen zu Rotationsbewegungen und Schwerpunkt

Verständnisfragen

1. Warum ist eine Kreisbewegung immer eine beschleunigte Bewegung?

   Lösung: Da Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit definiert ist muss eine Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung sein. Hier ändert sich vielleicht nicht der Betrag der Geschwindigkeit, wohl aber ihre Richtung in jedem Punkt des Kreises.

2. Warum ist die Zentrifugalkraft eine Scheinkraft, die Zentripetalkraft jedoch nicht?

   Lösung: Die Zentrifugalkraft resultiert aus der Trägheit des Körpers, der auf einer Kreisbahn bewegt wird. Sie ist keine tatsächliche Kraft, insofern, dass sie nicht dem Actio-Reactio-Prinzip (3. Newtonsches Axiom) entspricht. Die Zentripetalkraft dagegen ist eine tatsächliche Kraft, die den Körper auf einer Kreisbahn hält, ihn also zu einer konstanten Änderung seines Geschwindigkeitsvektors zwingt.

3. Welcher Zusammenhang zwischen Zentrifugal- und Zentripetalkraft besteht in einem Körper, der sich auf einer gleichmäßigen Kreisbahn bewegt?

   Lösung: Die Zentrifugalkraft ist gleich groß und entgegen gerichtet der Zentripetalkraft.

4. Was geschieht wenn die Zentrifugal- oder Zentripetalkraft größer ist als die jeweils andere?

   Lösung: Ist die Zentrifugalkraft größer als die Zentripetalkraft vergrößert sich der Radius der Kreisbahn auf der ein Körper sich bewegt. Ist die Zentripetalkraft größer als die Zentrifugalkraft so verkleinert sich der Radius der Kreisbahn, auf der ein Körper sich bewegt.

Rechenaufgaben

1. Das Ligamentum patellae ist ein ca 5cm langes Band, welches sich von der Unterseite der Kniescheibe zu seinem Ansatzpunkt an der Vorderseite des Schienbeins zieht. Es dient als Verbindung zum Musculus quadriceps femoris, dem großen Beinstrecker, der für die Streckung des menschlichen Beines sorgt. Die Kniescheibe hat eine Dicke von etwa 1cm. Stark vereinfacht lässt sich dieses Konstrukt als ein Dreieck ansehen. Berechnen Sie das Drehmoment, dass auf das Schienbein ausgeübt wird, wenn an der Ligamentum patellae mit 3N gezogen wird. Warum ist die Kniescheibe ein wichtiger Bestandteil des Kniegelenks?

   Lösung: Der Ansatzpunkt der Ligamentum patellae liegt etwa $s = \sqrt{(5cm)^2 - (1cm)^2} \approx 4{,}9cm$unterhalb des Kniegelenks. Dies ist der Radius der Rotation um das Kniegelenk. Die Ligamentum patellae setzt in einem Winkel von $\alpha = arcsin\left(\frac{1cm}{5cm}\right) \approx 11{,}54°$am Knochen an. Wird nun mit 3N daran gezogen ergibt sich ein Drehmoment von $M = 3N \cdot 0{,}049m \cdot \frac{1cm}{5cm} \approx 0{,}03Nm$. Ohne die Kniescheibe als eine Art Abstandshalter des Bandes über dem Kniegelenk wäre der Ansatzwinkel des Bandes sehr viel kleiner und damit bei gleichem

Kraftaufwand das resultierende Drehmoment geringer, da hier eine $sin(\alpha)$-Abhängigkeit besteht.

2. Sie möchten eine Blutprobe zentrifugieren. Zur Verfügung stehen Ihnen zwei Zentrifugen jeweils mit der RZB (Relative Zentrifugalbeschleunigung) von 18109,37 und 27164,05. Die RZB berechnet sich folgendermaßen: $RZB = \frac{4\pi^2}{g} rf^2$ wobei g die Erdbeschleunigung, r der Radius der Zentrifuge und f die Frequenz ist. Mit welcher Zentrifuge wird die Auftrennung des Blutes schneller erfolgen? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung: Die Auftrennung wird in einer Zentrifuge mit größerem RZB schneller vonstatten gehen als in einer solchen mit einem kleineren RZB, denn der RZB hängt direkt mit der von der Zentrifuge produzierbaren Radialbeschleunigung ($a_r = r\omega^2 = r(2\pi f)^2$) ab.

3. Eine Probe eine Stoffes soll aufzentrifugiert werden. Sie nutzen dazu eine Zentrifuge mit einer Umdrehungszahl von $f = 18000 \frac{1}{min}$ und einem Durchmesser von 10cm am Einsteckpunkt des Probentubes. Der Tube ist 5cm lang, hat einen Durchmesser von 0,8cm und ist bis zu einer Höhe von 3,8cm mit Flüssigkeit gefüllt. Während des Zentrifugierens ist der Tube um $\alpha = 45°$ gegen die Senkrechte geneigt.

   a) Berechnen Sie die am oberen und unteren Ende der Flüssigkeit wirkende Radialbeschleunigung. Nehmen Sie dazu an, dass die Aufhängung des Tubes an seinem Mittelpunkt erfolgt.

   b) Ein Wassermolekül wiegt etwa $3 \cdot 10^{-23} g$. Berechnen Sie die auf das Molekül wirkende Fliehkraft am oberen und unteren Ende der Flüssigkeit.

   c) Berechnen Sie den Betrag der Kraftkomponente, die in Richtung der Symmetrieachse des Tubes zeigt an beiden Punkten.

   d) Das Hauptgewinde, an dem die Zentrifuge in ihrem Mittelpunkt aufgehängt ist erträgt eine seitliche Scherkraft von 1000N. Berechnen Sie die seitlich wirkende Kraft, die bei der Zentrifugation des Tubes auf das Hauptgewinde entsteht. Nehmen Sie dazu einen zylinderförmigen Tube mit einer Masse von 5g und eine Dichte Ihrer Probe von 0,98g/cm^3 an. Warum ist es wichtig, bei Zentrifugen auf eine symmetrische Bestückung zu achten?

Lösung:

   a) Wenn der Tube in seinem Mittelpunkt aufgehängt ist befinden sich 2,5cm der Flüssigkeit unter und 1,3cm der Flüssigkeit über der Aufhängung. Bei einer Neigung von 45° ergibt sich daraus ein Mittelpunktsabstand von $r_1 = 5cm - cos(45°) \cdot 1{,}3cm \approx 4{,}08cm$ und $r_2 = 5cm + cos(45°) \cdot 2{,}5cm \approx 6{,}77cm$ für das obere bzw. untere Flüssigkeitsende. Für die Radialbeschleunigung gilt $a_r = r\omega^2 = r(2\pi f)^2$ und man erhält somit $a_r = 0{,}0408m \left(2\pi \frac{18000\frac{1}{min}}{60\frac{s}{min}}\right)^2 \approx 144964{,}75 \frac{m}{s^2}$ für das obere Flüssigkeitsende und $a_r = 0{,}0677m \left(2\pi \frac{18000\frac{1}{min}}{60\frac{s}{min}}\right)^2 \approx 240542{,}00 \frac{m}{s^2}$ für das untere Flüssigkeitsende.

b) Es gilt $F_z = m \cdot a_r$wobei die Radialrichtung als positiv definiert wurde (die Zentripetalkraft trägt demnach ein negatives Vorzeichen). Man erhält mit den Ergebnissen aus Teil a somit $F_z = 3 \cdot 10^{-26} kg \cdot 144964{,}75 \frac{m}{s^2} \approx 4{,}35 \cdot 10^{-21} N$für das obere Flüssigkeitsende und $F_z = 3 \cdot 10^{-26} kg \cdot 240542{,}00 \frac{m}{s^2} \approx 7{,}22 \cdot 10^{-21} N$für das untere Flüssigkeitsende.

c) Aus den geometrischen Gegebenheiten des Problems erhält man, dass $F = cos(\alpha) \cdot F_z$und somit $F_1 = cos(45°) \cdot 4{,}35 \cdot 10^{-21} N \approx 3{,}08 \cdot 10^{-21} N$für das obere Flüssigkeitsende und $F_1 = cos(45°) \cdot 7{,}22 \cdot 10^{-21} N \approx 5{,}11 \cdot 10^{-21} N$für das untere Flüssigkeitsende.

d) Das Volumen der Flüssigkeit beträgt $V = \pi(0{,}4cm)^2 \cdot 3{,}8cm \approx 1{,}91cm^3$und sie hat damit eine Masse von $M_F = 0{,}98 \frac{g}{cm^3} \cdot 1{,}91cm^3 \approx 1{,}87g$. Zusammen mit der Masse des Tubes ergibt sich $M = 1{,}87g + 5g = 6{,}87g$. Diese Masse kann als ein an am Mittelpunkt des Tubes aufgehängter Massenpunkt gesehen werden. Man erhält eine Fliehkraft von $F_z = 0{,}00687kg \cdot 0{,}05m \cdot \left(2\pi 300 \frac{1}{s}\right)^2 \approx 1220{,}48N$. Diese Kraft kann das Hauptgewinde nicht halten. Durch die hohen Umdrehungszahlen in Zentrifugen wirken auch bei kleinen Probenmassen hohe Kräfte auf die zentrale Aufhängung, die diese ausgleichen muss. Man muss auf eine symmetrische Bestückung achten, da sonst eine sogenannte Unwucht entsteht, der Schwerpunkt des Systems also nicht mehr mit der Rotationsachse übereinstimmt. Dies kann schnell zu Unfällen führen wenn die Aufhängung den dabei entstehenden Kräften nicht widerstehen kann.

1. Sie haben auf dem Flohmarkt eine altertümliche Balkenwaage gekauft. Leider ist diese nicht ganz austariert: Ihr Auflagepunkt liegt nicht genau in der Mitte des Waagenbalkens, sondern ist um 2,3mm gegen diesen verschoben. Zusätzlich ist aus der Waagschale am längeren Balkenstück ein Stück herausgebrochen, weshalb diese 4g leichter ist als ihr Gegenstück. Die Schalen sollten jeweils 50g wiegen. Nehmen Sie an, der Waagbalken habe eine einfache Kantholzform und eine Länge von 15cm.

a) Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts des Waagschalen-Waagbalken-Systems.

b) Sie möchten die Unstimmigkeit nun mit kleinen Gewichten ausmerzen. Wie viel Gewicht müssen Sie in welche Waagschale geben?

Lösung:

a) An dieser Stelle kann das Hebelgesetz genutzt werden: Ist das Produkt von angreifender Kraft und Lastarmlänge auf beiden Seiten gleich, so befindet sich das System im Gleichgewicht. Zusätzlich ist die Gesamtlänge des Waagbalkens bekannt. Hieraus lässt sich folgendes Gleichungssystem bestimmen:

$$\left| \begin{array}{c} 0{,}05kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot l_1 = 0{,}046kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot l_2 \\ l_1 + l_2 = 0{,}15m \end{array} \right|$$

Hieraus folgert man, dass $l_1 = 0{,}15m - l_2$ist. Eingesetzt in das Hebelgesetzt ergibt sich:

$$0{,}05kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}15m - l_2) = 0{,}046kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot l_2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}05kg \cdot 0{,}15m - 0{,}05kg \cdot l_2 = 0{,}046kg \cdot l_2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}05kg \cdot 0{,}15m = l_2(0{,}046kg + 0{,}05kg)$$
$$\Leftrightarrow l_2 = \frac{0{,}05kg \cdot 0{,}15m}{0{,}096kg} \approx 0{,}078m$$

und damit $l_1 = 0{,}015m - 0{,}078m = 0{,}072m$. Der Schwerpunkt des Systems liegt also 7,2cm von der intakten Schale und 7,8cm von der beschädigten Schale entfernt.

b) Um die Waage auszutarieren muss das wirkende Gesamtdrehmoment verschwinden. Es gilt also:

$$M = M_1 + M_2 = (0{,}046kg + m) \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}0773m - 0{,}05kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}0727m$$
$$= 0$$

Aus der Rechnung von a erkennt man, dass Masse der beschädigten Schale zugefügt werden muss, da der Schwerpunkt des Systems 7,8cm von dieser entfernt ist, die Auflagefläche aber nur 7,73cm. Man beachte, dass die beiden Drehmomente gegenläufig sind und darum unterschiedliche Vorzeichen haben müssen. Man löst auf:

$$m = \frac{0{,}05kg \cdot 0{,}0727m}{0{,}0773m} - 0{,}046kg \approx 0{,}001kg = 1g$$

Es muss also 1g auf die beschädigte Waagschale gelegt werden.

2. Ein Schwirrholz ist eine flache, ovale oder quaderförmige Scheibe aus Holz oder Knochen, die an einem Seil kreisförmig um den Nutzer geschwungen wird. Durch die vorbeiströmende Luft wird die Scheibe in Rotation und Schwingung versetzt und erzeugt einen tiefen, brummenden Ton. Das Gerät wird noch heute von den Aborigines und Ureinwohnern Nordamerikas zur Kommunikation über weite Strecken eingesetzt, da sein durchdringender Ton weithin zu hören ist. Die Tonhöhe kann durch die Rotationsgeschwindigkeit variiert werden. Nehmen Sie an, die Masse eines solchen Schwirrholzes beträgt 480g und es hat eine Abmessung von 2cm x 7cm x 25cm. Die Schnur, an der es mit seiner kleinsten Seitenfläche angebracht ist, wird der Einfachheit halber als masselos angenommen.

   a) Das Trägheitsmoment einer Masse m im Abstand r von seiner Rotationsachse beträgt $\Theta = mr^2$. Das Schwirrholz wird nun in einem Kreis mit einem Durchmesser von 2,5m mit einer Frequenz von 180Hz geschwungen. Bestimmen Sie den Drehimpuls des Systems.

   b) Der Durchmesser des Kreises wird nun während des Schwingens durch ein Verkürzen der Schnur auf 2m reduziert. Wie verändert sich die Rotationsfrequnz?

   c) Die Rotation des Schwirrholzes um sich selbst beträgt typischerweise etwa 80Hz. Das Trägheitsmoment eines um eine seiner Symmetrieachsen rotierenden Quaders beträgt $\Theta = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$wobei a und b die Längen der Quaderseiten sind, zu denen die Rotationsachse nicht parallel liegt. Bestimmen Sie die Rotationsenergie des

Schwirrholzes um sich selbst und des Schwirrholzes um den Kreismittelpunkt. Welche Energie überwiegt?

Lösung:

a) Das System besitzt einen Drehimpuls von $L = 0{,}48kg \cdot (0{,}5 \cdot 2{,}5m)^2 \cdot (2\pi 180Hz) \approx 848{,}23\frac{kgm^2}{s}$. Hier muss die Umrechnung von Frequenz in Kreisfrequenz beachtet werden.

b) Es Gilt Drehimpulserhaltung, darum: $\omega = \frac{L}{\Theta_{neu}}$und damit $\omega = \frac{848{,}23\frac{kgm^2}{s}}{0{,}48kg\cdot(0{,}5\cdot 2m)^2} \approx 1767{,}15\frac{1}{s} \approx 281{,}25Hz$. Die Frequenz, mit der das Schwirrholz im Kreis schwingt erhöht sich also aufgrund der Drehimpulserhaltung des Systems.

c) Die Rotationsenergie des um sich selbst drehenden Schwirrholzes beträgt $E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}48kg((0{,}02m)^2 + (0{,}07m)^2) \cdot (2\pi 80Hz)^2 \approx 26{,}78J$und die des sich um den Kreismittelpunkt drehenden Schwirrholzes $E_{rot} = \frac{1}{2}0{,}48kg(0{,}5 \cdot 2{,}5m)^2 \cdot (2\pi 180Hz)^2 \approx 119915{,}69J$. Die Energie der Rotation um den Kreismittelpunkt ist somit sehr viel höher als die Energie der Rotation um sich selbst.